

# La trigonométrie pour les nuls

## et quelques applications en astronomie



**Le Balcon des Étoiles**  
**31310 LATRAPE**

2026 - Michel Monesma

# Pourquoi ?

- L'astronomie est une science et fait souvent appel à des notions de géométrie.
- À notre niveau, nous ne nous lancerons pas dans des calculs savants.
- Par contre, quelques notions de base simples nous permettront d'aborder des phénomènes astronomiques intéressants qui resteront quand même à la portée des personnes n'étant pas forcément des mathématiciens et des physiciens chevronnés.
- Avant d'aborder la trigonométrie, nous reverrons les bases des triangles et des cercle.
- Quitte à vous d'aller plus loin.

# Quelques rappels utiles

- Dans une identité, quand un membre change de côté du signe =, il change de signe : + devient -, x devient / et inversement.

$$a + b = c \Rightarrow a = c - b \quad \text{---} \quad a \cdot b = c \Rightarrow a = \frac{c}{b}$$

- Dans une identité, si on applique un opérateur identique de chaque côté du signe =, l'identité reste valable.

$$a \cdot b = c + d \Rightarrow \frac{a \cdot d}{x} = \frac{c + d}{x}$$

- Le résultat de la division d'un rapport par un autre rapport est égal au rapport supérieur multiplié par l'inverse du second rapport.

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

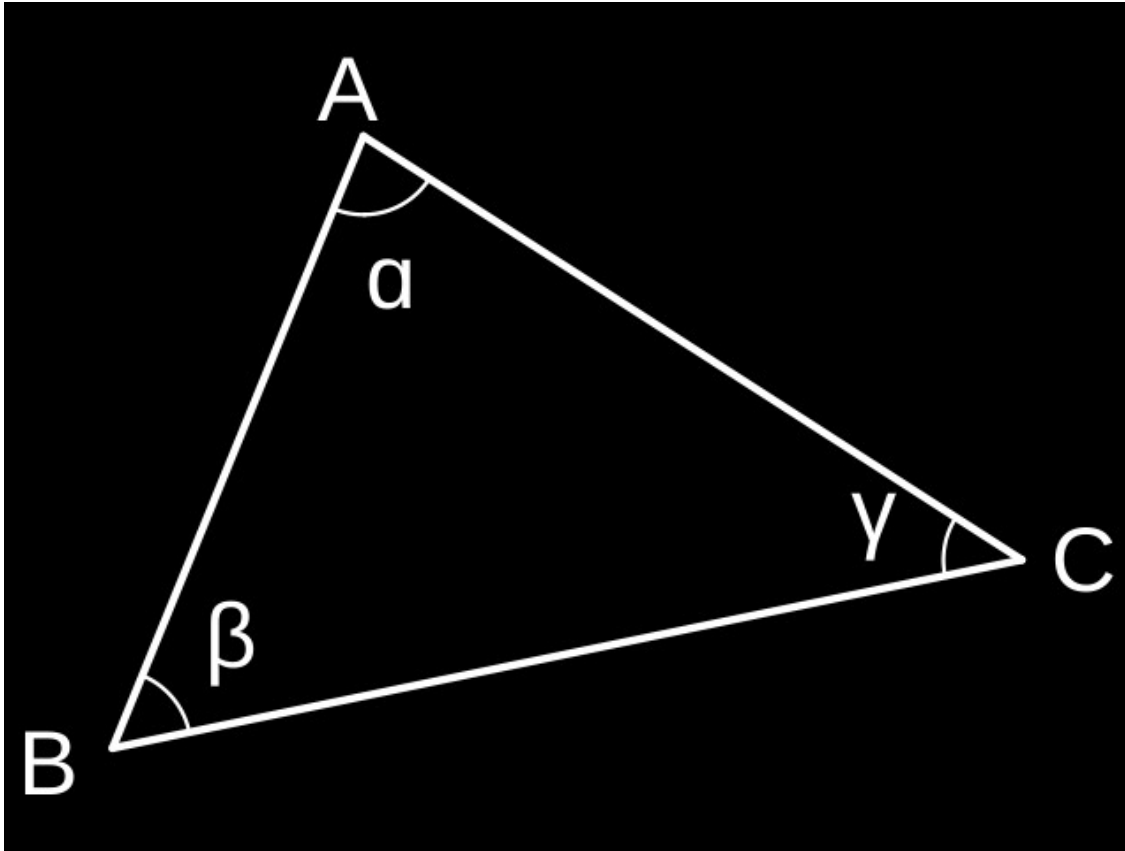
- Dans le développement d'expressions entre parenthèses précédées du signe -, les signes + et - s'inversent.

$$a - (b - c) = a - b + c$$

# Objectifs

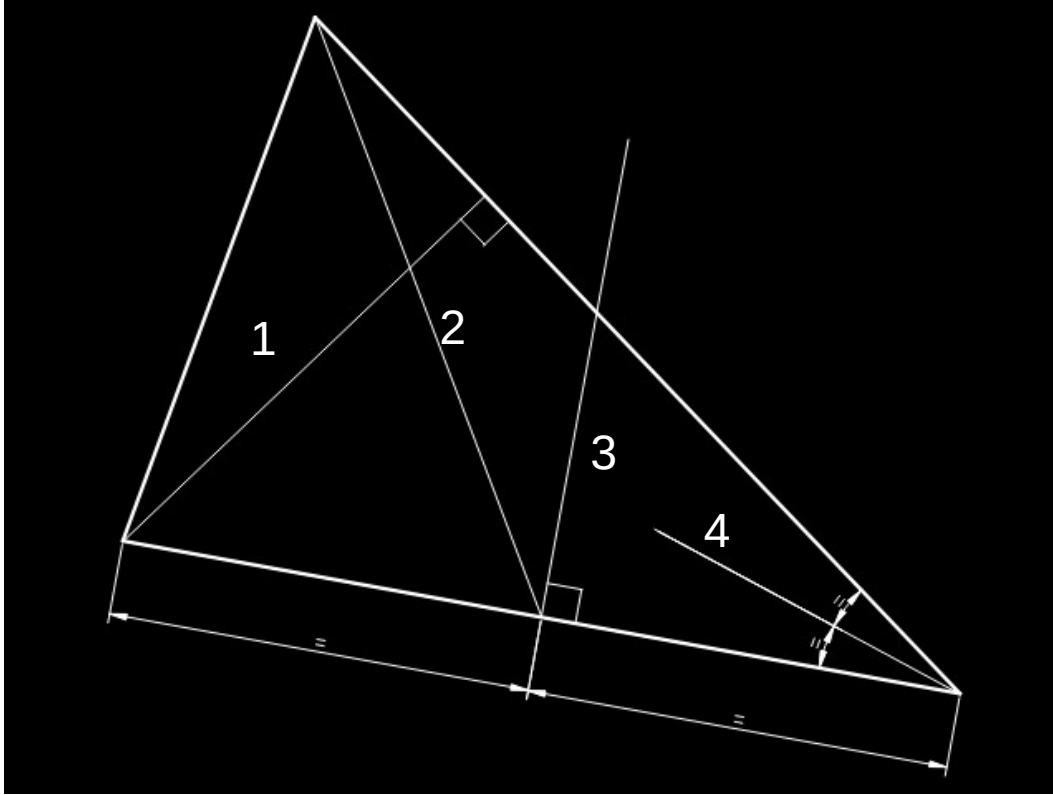
- Connaître les principales propriétés des triangles.
- Comprendre les éléments essentiels d'un cercle.
- Découvrir les bases de la trigonométrie.
- Résoudre quelques problèmes concrets, si vous le souhaitez.

# Le vocabulaire du triangle



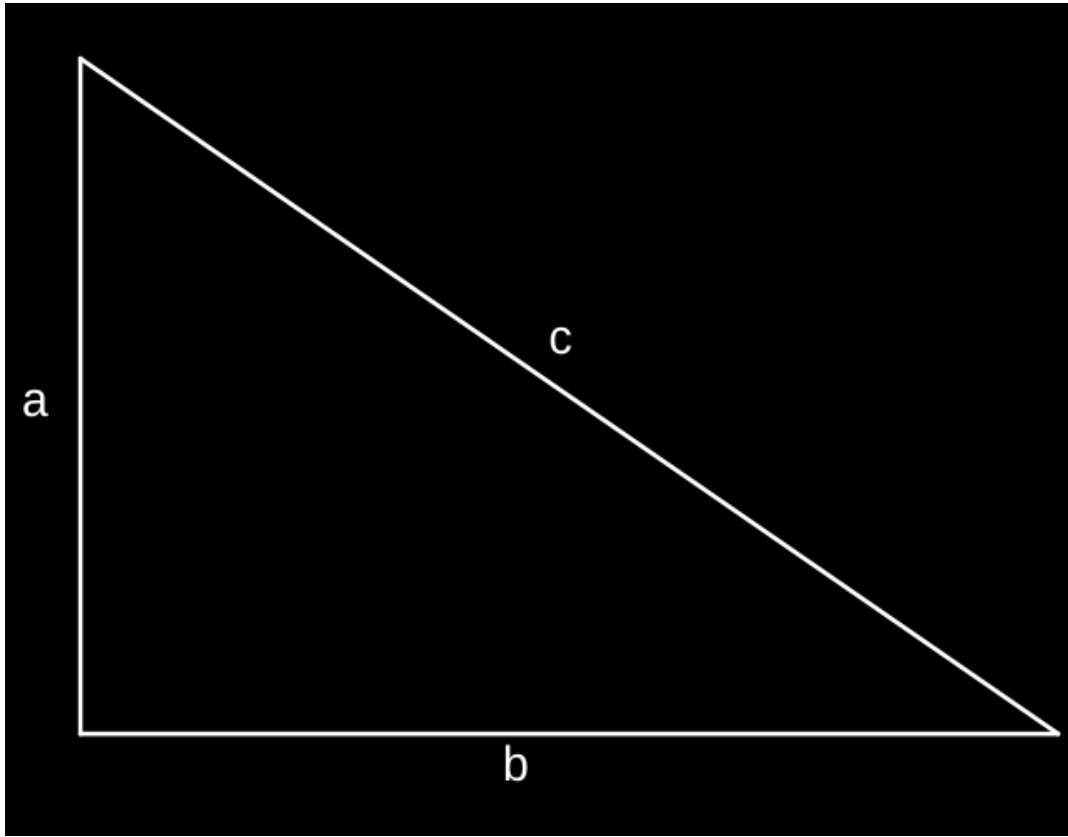
- 3 sommets (A), (B) et (C)
- 3 côtés (AB), (BC) et (CA)
- 3 angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$
- Le côté opposé au sommet (A) est le côté (BC)
- La somme des angles est égale à  $180^\circ$

# Droites remarquables d'un triangle



- La hauteur : 1
- La médiane : 2
- La médiatrice : 3
- La bissectrice : 4

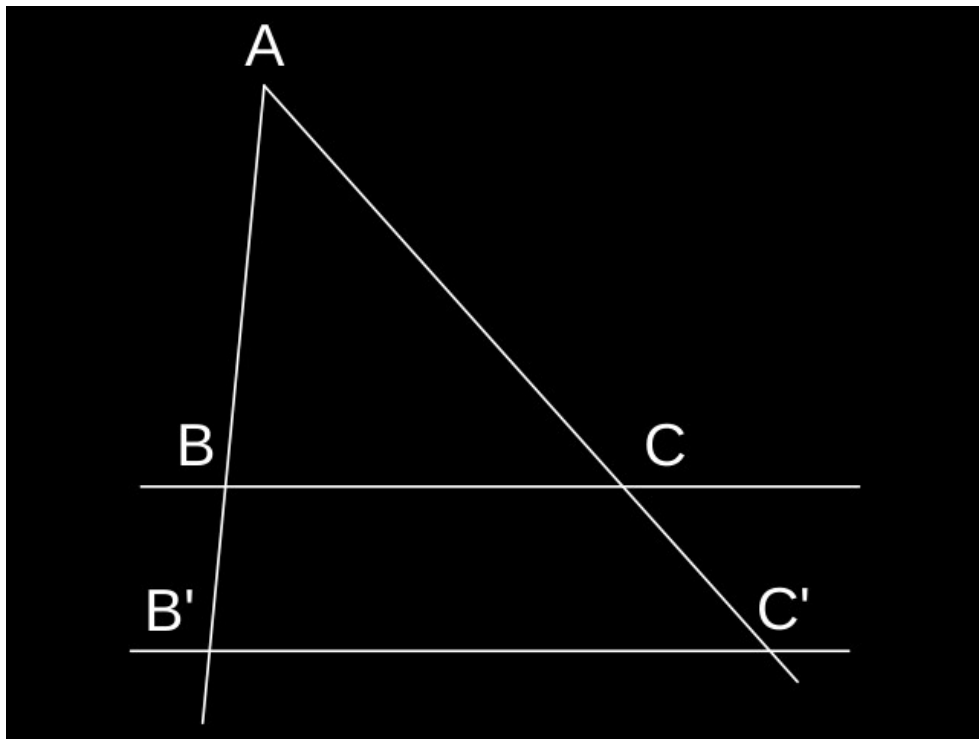
# Théorème de Pythagore



$$c^2 = a^2 + b^2$$

- « Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés »
- Ce théorème est notamment utilisé pour calculer une distance à partir de 2 directions perpendiculaires ; Aristarque de Samos utilisa cette méthode pour comparer les distances entre Terre, Lune et Soleil lors d'un quartier de Lune.
- **$c=13, b=12$  : combien vaut  $a$  ?**
- $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$   
 $a = \sqrt{c^2 - b^2} \rightarrow (a=5)$

# Théorème de Thalès



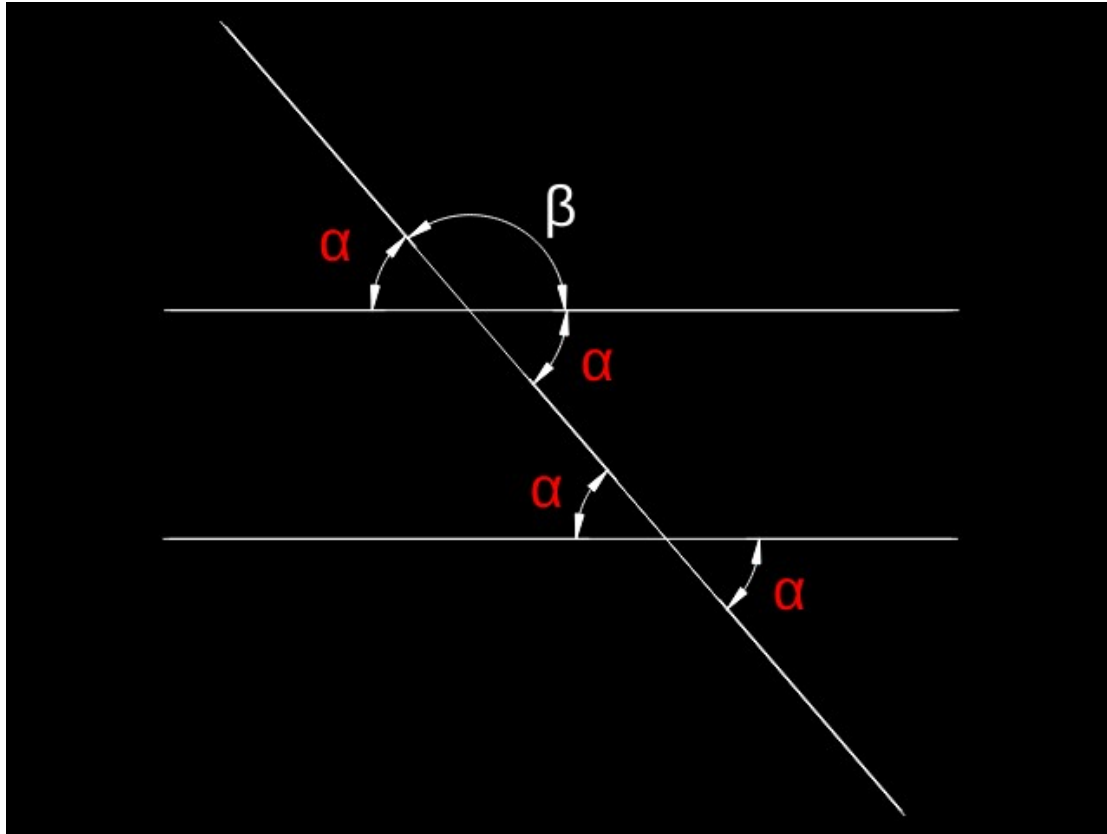
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

- Lorsque 2 droites sécantes sont coupées par 2 droites parallèles, les longueurs correspondantes sont proportionnelles.
- Ce théorème permet, entre autre, de calculer la hauteur d'un objet éloigné.

1 bâton vertical de 1m projette une ombre au sol de 0,80 m. Un arbre situé à côté de lui projette une ombre de 6,40 m. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

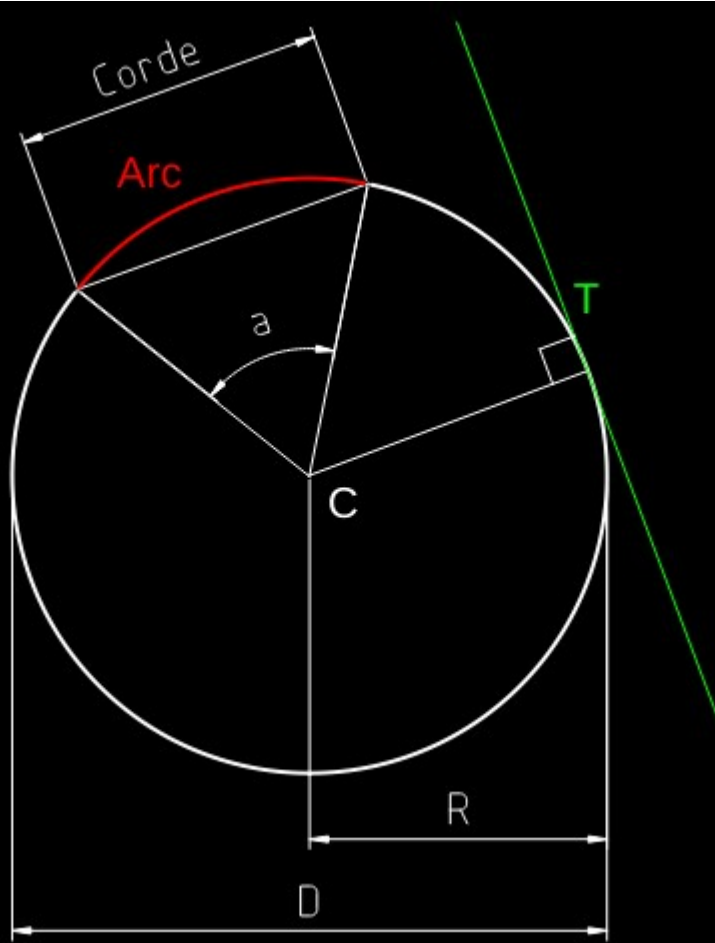
$$H = 6,40 \frac{1}{0,80} = 8 \text{ m}$$

# Droite sécante à 2 droites parallèles



- Égalité des angles  $\alpha$ .
- $\beta$ , l'angle complémentaire, est bien sûr égal à  $180^\circ - \alpha$

# Les éléments du cercle



- Le centre  $C$
- Le rayon  $R$
- Le diamètre  $D$
- La corde
- L'arc
- La tangente  $T$

# Petit exercice

$$\text{cercle} = 360^\circ$$

$$\text{circonférence} = 2 \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot D$$

$$\text{arc} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \alpha}{360} \quad (\text{pour un angle } \alpha)$$

## Vitesse de déplacement de la Terre :

Longueur de l'orbite :  $L = 2 \cdot \pi \cdot 149\,597\,870,7$   
soit 939 951 143 km !!!

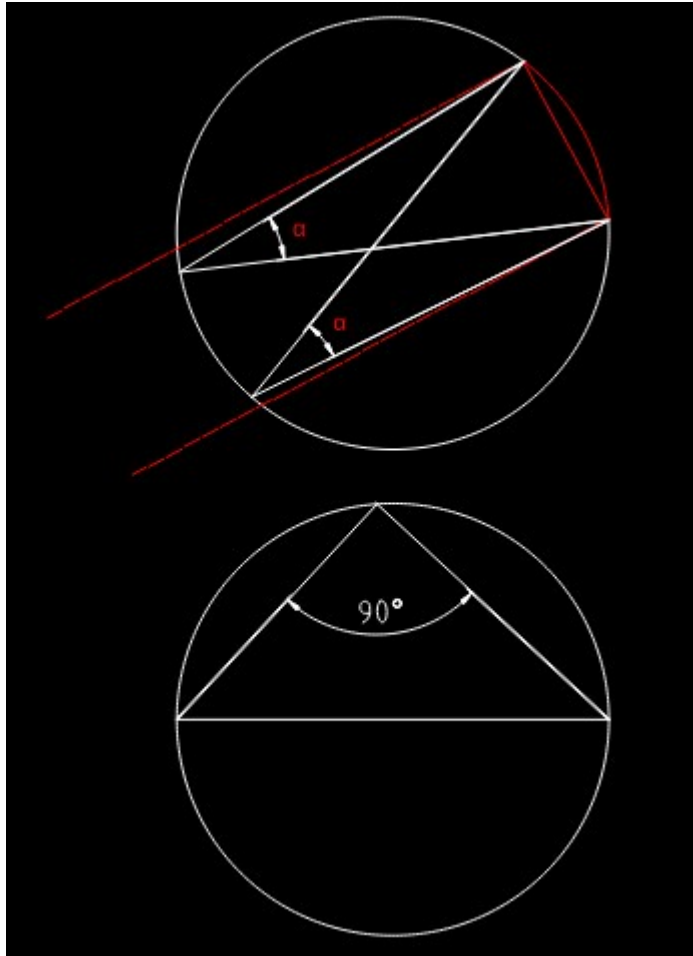
En 1 jour elle parcourt :  $\frac{939\,951\,143}{365,25}$   
soit 2 573 446 km

En 1 h elle parcourt donc :  $\frac{2\,573\,446}{24}$  km

Soit 107 227 km/h (29,78 km/s)

- Calculer la vitesse de déplacement de la Terre autour du Soleil en km/heure.
- Données :
  - $\pi = 3,14159$
  - Distance Terre/Soleil : 149 597 870,7 km.
  - L'orbite de la Terre autour du Soleil est circulaire.
  - Durée de l'année : 365,25 jours

# Quelques angles remarquables dans un cercle

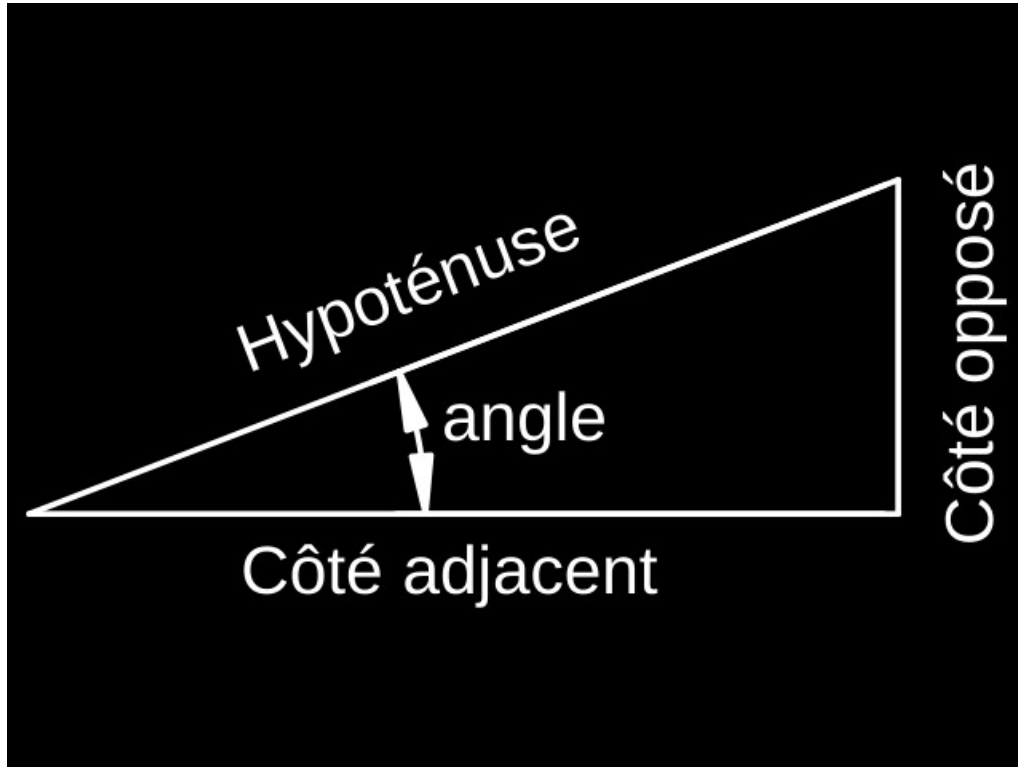


- Un angle au centre a son sommet au centre du cercle.
- Un angle inscrit a son sommet sur le cercle.
- Lorsque 2 angles inscrits interceptent le même arc (ou corde), ils ont la même valeur s'il sont du même côté de la corde.
- Tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre est rectangle (théorème de Thalès dans le cercle).

# Pourquoi la trigonométrie ?

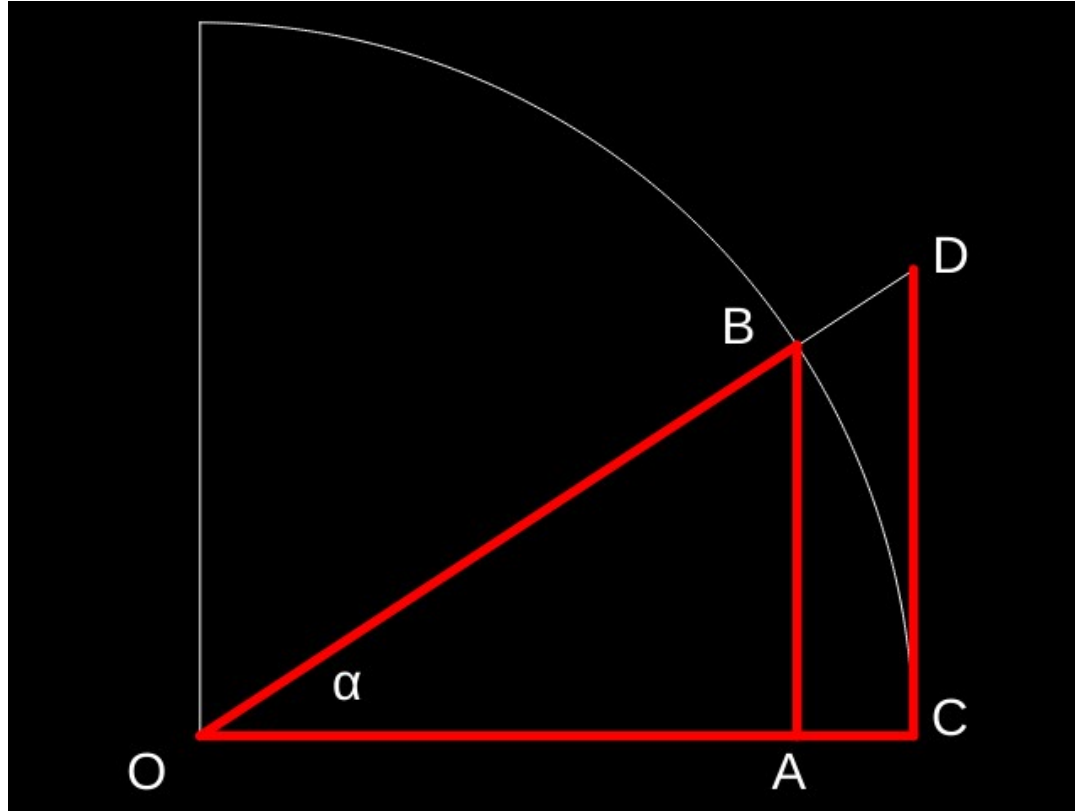
- Elle permet de relier :
  - Les angles, car en astronomie les dimensions des objets sont mesurées en angles ; seules les distances sont évaluées en absolu :
    - Année lumière (AL) pour le grand public : 9 460 milliards de km
    - Unité Astronomique (UA) dans le système solaire : environ 150 millions de km
    - Parsec pour les astronomes professionnels : 3,26 AL
  - Les longueurs des côtés pour des triangles reliant 3 objets dans l'espace.
  - Les distances à mesurer dans l'espace.

# Le triangle rectangle



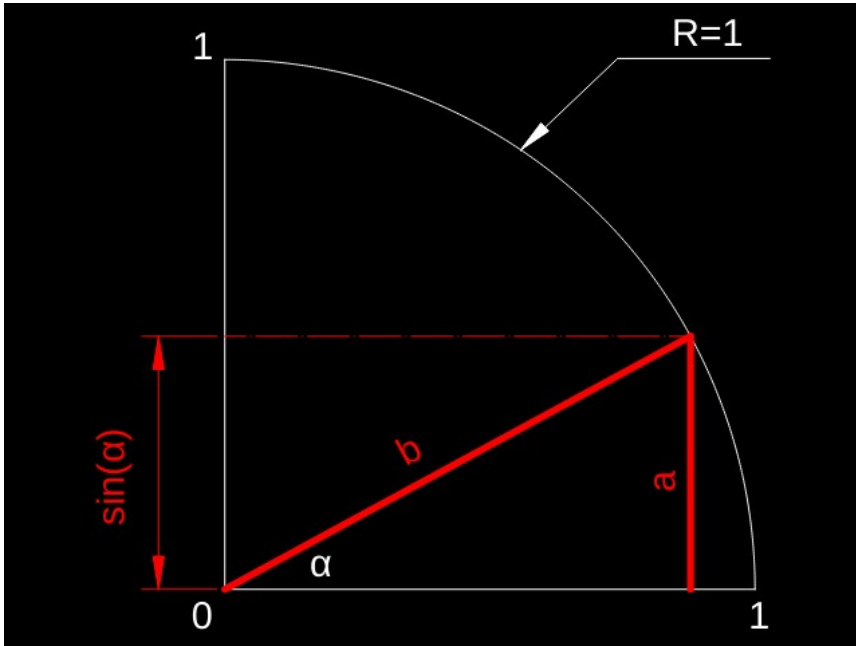
- Pour définir les entités trigonométriques, nous utiliserons un cercle et des triangles rectangle.
- Hypoténuse = côté opposé à l'angle droit.
- Côté opposé = côté situé en face de l'angle étudié.
- Côté adjacent = côté autre que l'hypoténuse qui touche l'angle étudié.

# Définitions



- Pour un angle  $\alpha$ 
  - Sinus = côté opposé sur hypoténuse soit  $AB/OB$
  - Cosinus = côté adjacent sur hypoténuse soit  $OA/OB$
  - Tangente = côté opposé sur côté adjacent soit  $CD/OC$
- L'angle  $\alpha$  sera exprimé en  $^\circ$  pour les calculs réalisés avec un calculatrice.
- Pour simplifier les explications nous utiliserons un cercle de rayon 1 par la suite.

# Le sinus



- $\sin(\alpha) = a / b = a / 1 = a$
- $\sin(0^\circ) = 0$
- $\sin(90^\circ) = 1$
- La valeur du sinus d'un angle est toujours comprise entre [0 et 1].

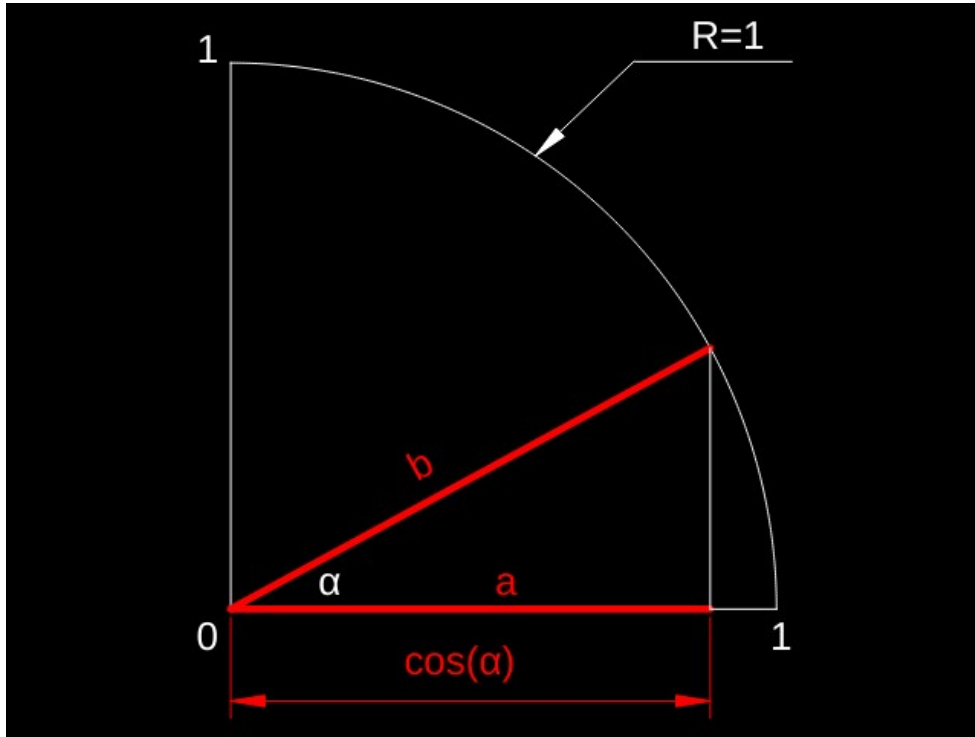
**$\alpha = 30^\circ$ ,  $b=12$  : calculer  $a$ .**

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sin(\alpha) \cdot b$$

$$a = \sin(30) \cdot 12$$

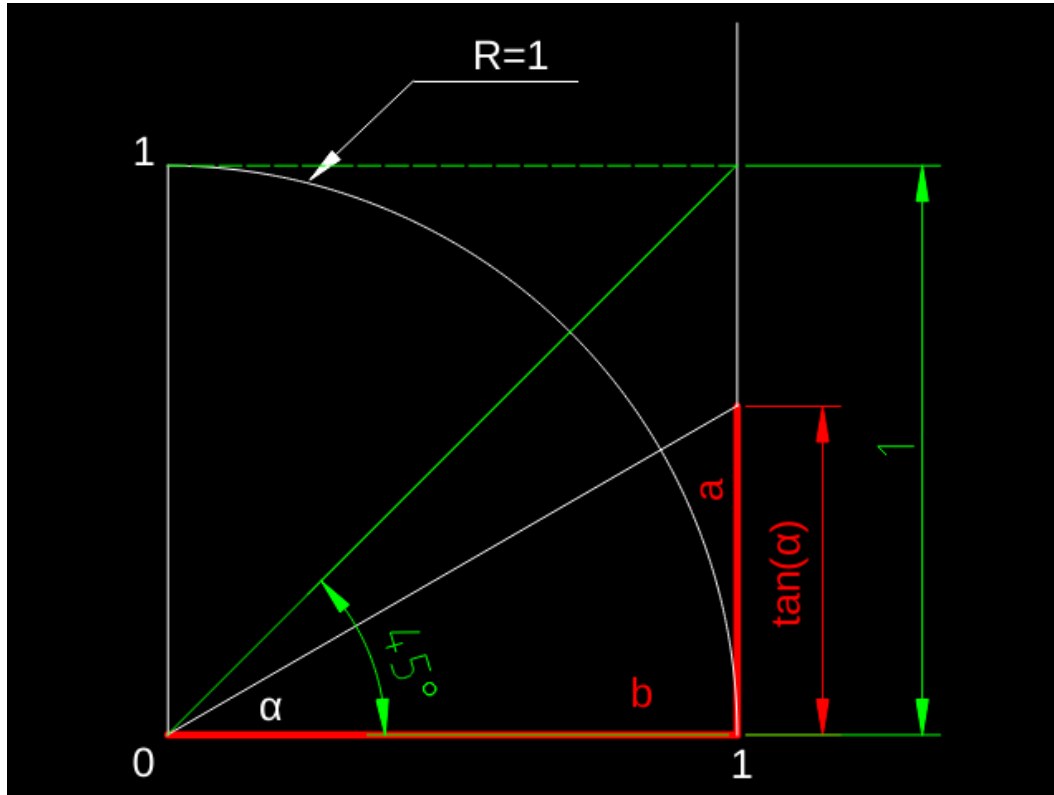
$$\sin(30) = 0,5 \Rightarrow a = 6$$

# Le cosinus



- $\cos(\alpha) = a / b = a / 1 = a$
- $\cos(0^\circ) = 1$
- $\cos(90^\circ) = 0$
- Comme pour le sinus, la valeur du cosinus d'un angle est comprise entre [0 et 1].

# La tangente



- $\tan(\alpha) = a / b$
- $\tan(0^\circ) = 0$
- $\tan(45^\circ) = 1$
- $\tan(90^\circ) = \infty$
- La valeur de la tangente d'un angle varie de  $[0 \text{ à } \infty]$ .
- Pour de très petits angles, on peut considérer comme égaux l'angle en radians, le sinus et la tangente.

# Et l'inverse de ces fonctions ?

- Si nous connaissons, par exemple, la valeur du sinus d'un angle  $\alpha$ , comment retrouver la valeur de cet angle ?
- Nous allons utiliser la fonction inverse arc sinus() notée  $\arcsin()$  et parfois  $\sin^{-1}()$ . Cette dernière représentation est surtout utilisée dans les calculatrices électroniques.
- Il en est de même pour les autres :  $\arccos()$  ou  $\cos^{-1}()$ ,  $\arctan()$  ou  $\tan^{-1}()$ .
- Attention à l'unité utilisée pour les angles ! Il existe 3 façons de définir un angle : le degré, le grade (ou gon) et le radian.  
 $360^\circ = 400 \text{ grades} = 2\pi \text{ radians}$ .
- Vérifier l'unité utilisée avant le calcul.

# Quelques conseils

- Pour résoudre un problème :
  - Faire un dessin même approximatif.
  - Repérer l'angle droit.
  - Repérer les côtés connus et recherchés.
    - Opposés et hypoténuse : utiliser le sinus
    - Adjacent et hypoténuse : utiliser le cosinus
    - Opposé et adjacent : utiliser la tangente
- Vous êtes maintenant prêts à résoudre pas mal de problèmes dans le domaine de l'astronomie.
- La trigonométrie n'est pas seulement théorique : elle permet de mesurer, construire, estimer et comprendre le monde qui nous entoure.

# Relations entre les lignes trigonométriques

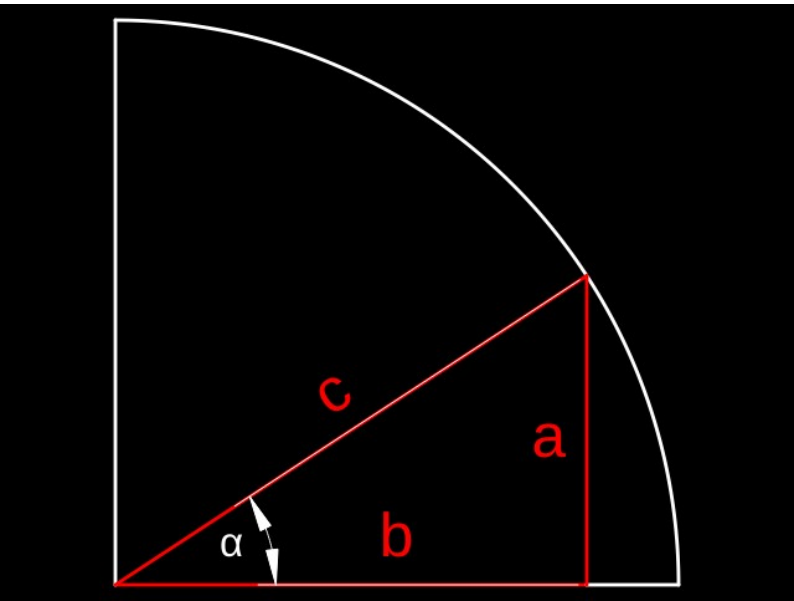
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  (merci Pythagore)
- $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$  (merci Thalès)
- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(2a) = 2 \sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\tan(2a) = 2\tan(a) / (1 - \tan^2(a))$
- Il en existe beaucoup d'autres qui dépassent le cadre de ce diaporama.

# Quelques valeurs remarquables

Table de lignes trigonométriques exactes<sup>2</sup> pour quelques angles  $\leq \frac{\pi}{4}$

| angle                                    | sinus                                         | cosinus                                      | tangente                        | cotangente                      | polygone régulier |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|
| $0^\circ = 0 \text{ rad}$                | 0                                             | 1                                            | 0                               | non défini                      |                   |
| $15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$  | $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$               | $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$              | $2 - \sqrt{3}$                  | $2 + \sqrt{3}$                  | dodécagone        |
| $18^\circ = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$  | $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2\varphi}$ | $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$              | $\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$ | $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$          | décagone          |
| $22,5^\circ = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ | $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$               | $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$              | $\sqrt{2} - 1$                  | $\sqrt{2} + 1$                  | octogone          |
| $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$   | $\frac{1}{2}$                                 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$            | $\sqrt{3}$                      | hexagone          |
| $36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$   | $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$               | $\frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{\varphi}{2}$ | $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$          | $\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$ | pentagone         |
| $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$                         | 1                               | 1                               | carré             |

# Démonstration $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pythagore})$$

Maintenant divisons par  $c^2$

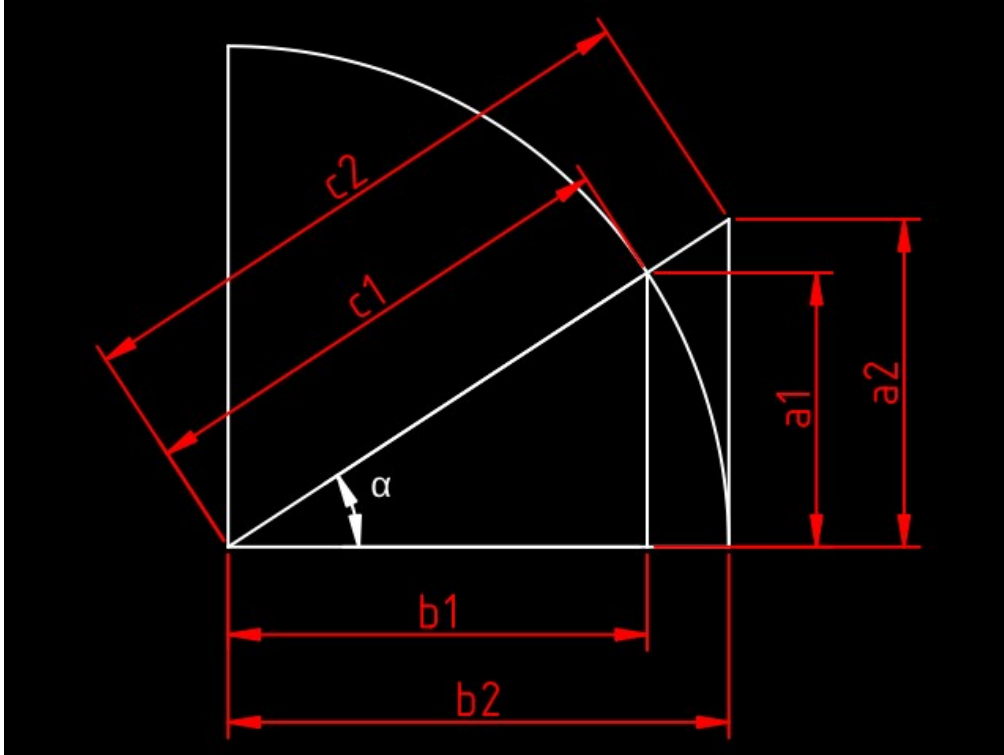
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \sin^2(\alpha) \quad \frac{b^2}{c^2} = \cos^2(\alpha) \quad \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Donc

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

# Démonstration $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$



$$\tan(\alpha) = \frac{a_2}{b_2} \quad \sin(\alpha) = \frac{a_1}{c_1} \quad \cos(\alpha) = \frac{b_1}{c_1}$$

Théorème de la proportionnalité de Thalès

Lorsque 2 droites sécantes sont coupées par 2 droites parallèles les longueurs correspondantes sont proportionnelles.

Donc

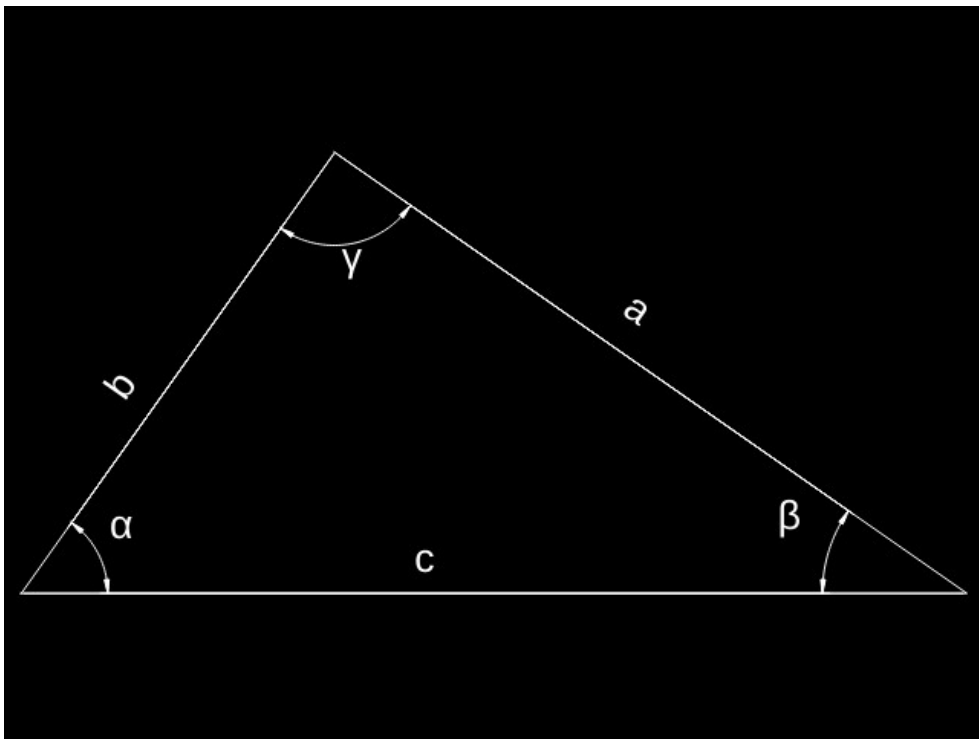
$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{a_1}{b_1}$$

Si je divise  $a_1$  par  $c_1$  et  $b_1$  par  $c_1$  l'égalité est conservée

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1/c_1}{b_1/c_1}$$

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

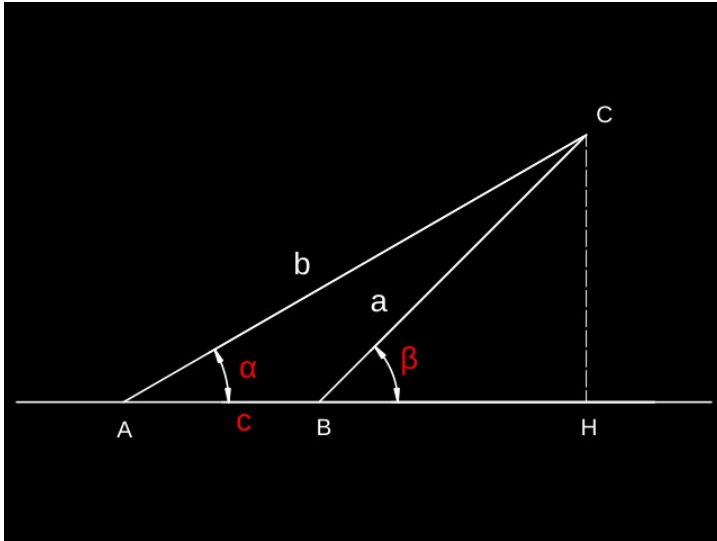
# Loi des sinus



- La loi des sinus est une relation de proportionnalité entre les rapports (sinus d'un angle/son côté opposé).
- Elle s'applique quel que soit le type de triangle.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad (\text{et inversement})$$

# La triangulation



- Sert à mesurer des distances sur la Terre et a été utilisée par Delambre et Méchain pour mesurer le méridien terrestre à la fin du XVIIIe siècle ; en fait, entre Dunkerque et Barcelone.
- En A on mesure l'angle  $\alpha$  d'un objet par rapport à l'horizontale.
- On se déplace ensuite de A vers B et on mesure ensuite l'angle  $\beta$  de visée de ce même objet depuis B.
- Connaissant 1 côté et 2 angles on peut calculer la distance de l'objet.
- En se déplaçant d'objet à objets éloignés on peut déterminer de longues distances.
- L'idéal est bien sûr de se déplacer sur le même méridien car autrement cela complexifie les calculs.

$$C = 180 - \alpha - (180 - \beta) = 180 - \alpha - 180 + \beta = \beta - \alpha$$

$$\text{Loi des sinus : } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(C)} \Rightarrow a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\text{mais } BH = a \cdot \cos(\beta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

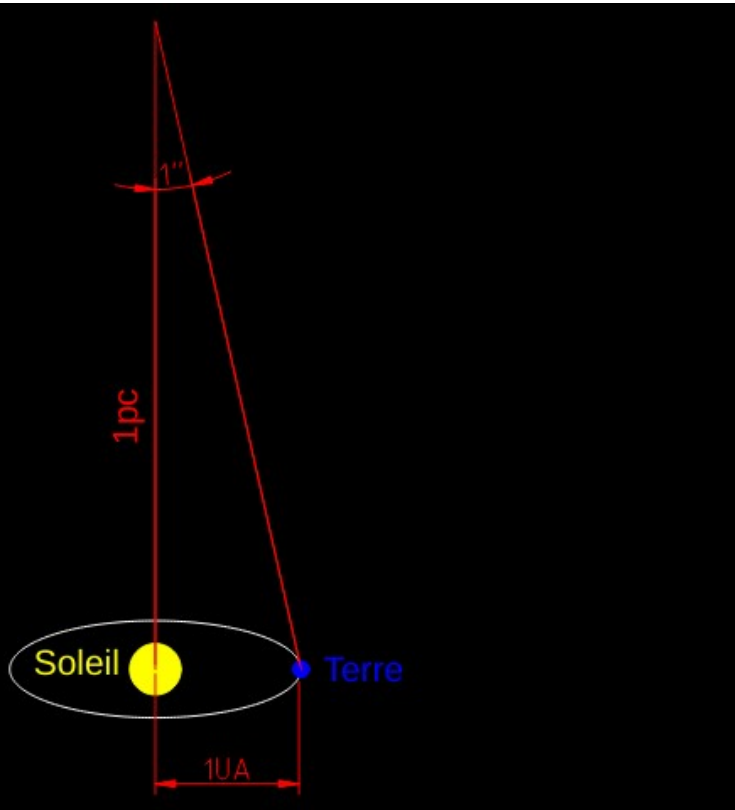
$$\text{Donc } AH = c + BH = c + c \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$AH = c \cdot \left( 1 + \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \right)$$

# La parallaxe

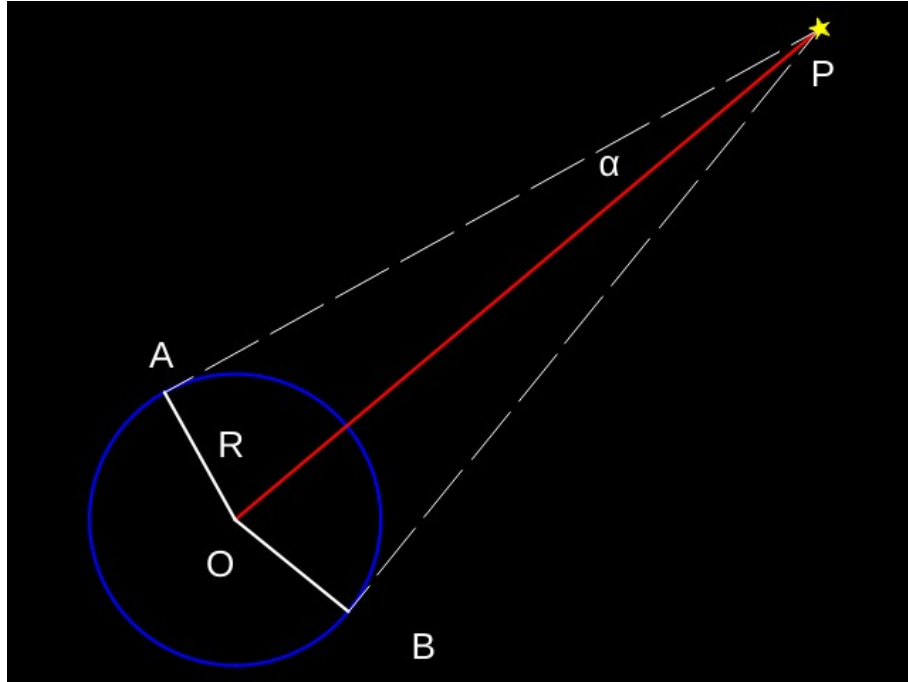
- C'est un effet d'optique que l'on peut mettre en évidence en levant le pouce devant soi, le bras tendu et en fixant un objet lointain ; en fermant alternativement les yeux, le pouce semble se déplacer par rapport à l'objet visé.
- La parallaxe est l'angle sous lequel on peut voir une longueur déterminée depuis un poste d'observation quelconque.
- La parallaxe est utilisée pour déterminer la distance des étoiles ou des planètes par rapport à l'observateur.
- Elle se base sur un fond de ciel dit « fixe » et à un déplacement de l'observateur par rapport à l'objet visé sur ce fond.
- Il faut disposer bien sûr de données établies, une distance de base et un angle.
- La détermination des distances par la méthode des céphéides et les mesures des satellites Hipparcos et Gaia ont considérablement enrichis les données de base.
- On distingue la parallaxe diurne de la parallaxe annuelle.

# Le parsec



- Originellement le parsec était défini comme la distance à laquelle une distance égale à 1UA est vue sous un angle de 1'' d'arc.
- C'est une application de la parallaxe dite « diurne » et de l'utilisation de la tangente.
$$\tan(1'') = \frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ pc}} \Rightarrow 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{\tan(1'')}$$
- Aujourd'hui le parsec est égal à  $\frac{648\,000}{\pi} \text{ UA}$  soit 3,26AL

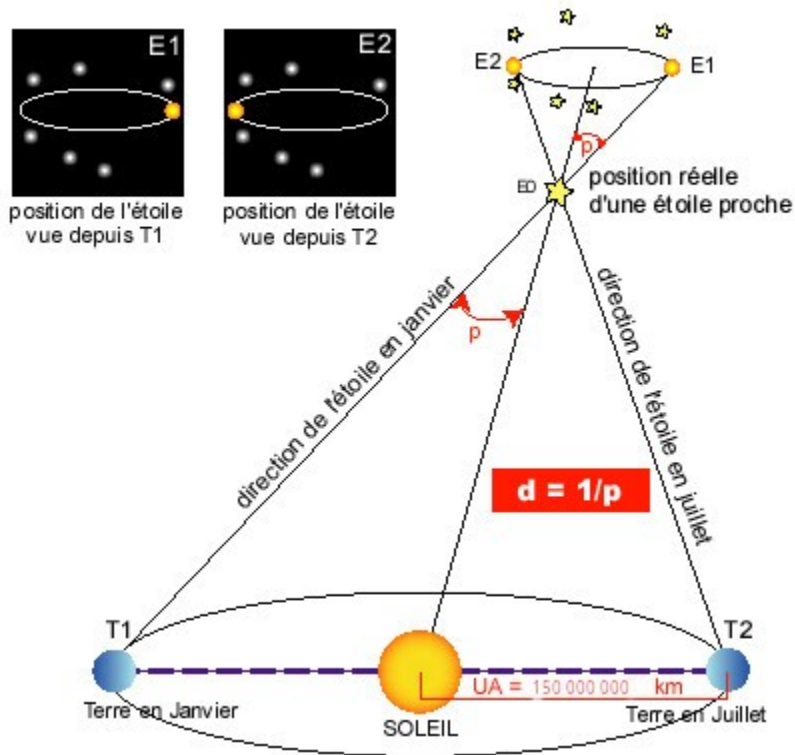
# La parallaxe diurne



$$\sin(\alpha) = \frac{R}{OP} \Rightarrow OP = \frac{R}{\sin(\alpha)}$$

- Elle consiste à observer, en même temps, le même objet en 2 endroits différents de la Terre rapporté au même fond d'étoiles lointaines (ou à utiliser la rotation de la Terre pour observer le même objet à partir du même endroit).
- Elle est utilisée pour les objets du système solaire.
- Connaissant R et l'angle  $\alpha$ , il est facile de déterminer la distance OP. Le schéma représente une configuration optimale,
- Elle atteint sa valeur maximale lorsque l'axe est à l'horizon (parallaxe horizontale).
- Lorsque l'objet est au zénith, la parallaxe diurne est nulle.
- La précision est limitée par le diamètre de la Terre.

# La parallaxe annuelle



- Elle consiste à observer à 6 mois d'intervalle un même objet « relativement proche » par rapport au ciel profond beaucoup plus éloigné.
- Le demi grand axe de l'ellipse parcourue par l'étoile visée par rapport au ciel « fixe » est appelé parallaxe annuelle.
- Pour des distance exprimées en parsec, la distance est égale à  $1/p$  si  $p$  est exprimé en secondes d'arc.
- Cet angle est très faible et, par exemple, pour une étoile située à 10AL de nous, il n'exède pas 0,35" d'arc.

$$D = \frac{1}{p} \text{ parsecs si } p \text{ en radians}$$

